

Simulation de la conduction non linéaire en régime variable : décomposition sur les modes de branche

Alain Neveu^{a*}, Khalil El-Khoury^b, Bernard Flament^c

^a Cenerg, École des mines de Paris, 60, bd Saint-Michel, 75272 Paris France

^b Université libanaise, Beyrouth, Liban

^c ENSAIS, 24, bd de la Victoire, 67084 Strasbourg cedex, France

(Reçu le 21 janvier 1998, accepté le 11 septembre 1998)

Abridged English version at the end of the text

Abstract — Simulation of nonlinear non-steady-state conduction: expansion on the branch modes. A Rayleigh–Ritz method is presented, for the achievement of a reduced model for nonlinear thermal problems. The modal basis that is used consists of ‘branch’ eigenfunctions, originally used in mechanical problems. After the definition of the branch eigenbasis, the eigenfunctions are determined analytically in the case of a one-dimensional cylindrical problem. An analysis of these modes is carried out, and the feasibility of the reduction of the modal basis is proved. This is done by separating the modes into two sets: the ‘slow’ modes and the ‘fast’ modes, each one of the latter being uncoupled from all the others and having a contribution that vanishes quickly in time. The method is tested in the case of a nonlinear transient conduction problem, which shows its great interest. © Elsevier, Paris.

non-linear heat conduction / modal analysis / branch modes / model reduction / thermal quenching

Résumé — Une méthode de Rayleigh–Ritz est présentée pour obtenir un modèle réduit d’évolution thermique non-linéaire. La base modale utilisée est constituée de fonctions propres dites «de branche» par référence à leur utilisation initiale en mécanique. Après avoir défini la base des fonctions propres de branches, ces dernières sont déterminées analytiquement dans le cas d’une géométrie monodimensionnelle axisymétrique. Une interprétation de ces modes est donnée, la faisabilité de réduire la base modale est vérifiée en mettant en évidence des modes dits «lents», dont les états sont couplés, et des modes «rapides», dont les états sont découplés. Un exemple d’application de conduction non-linéaire en régime variable clôture l’article et montre la pertinence de la méthode exposée. © Elsevier, Paris.

conduction non linéaire / analyse modale / modes de branche / réduction de modèle / trempe thermique

Nomenclature

A	constante d’intégration		
a	diffusivité thermique $a = k/c$	$s^{-1} \cdot m^2$	
B_i	nombre de Biot hR/k		
c, c_0	capacité calorifique volumique	$J \cdot m^{-3} \cdot K^{-1}$	
\mathcal{D}	domaine géométrique de frontière $\partial\mathcal{D}$		
f	fonction de l’espace définie dans $\mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$		
\mathcal{F}	espace des fonctions f définies dans $\mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$, continues, de classe C^1 et de carré sommable		
	h	coefficient d’échange superficiel	$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$
	J_m, Y_m	fonctions de Bessel d’ordre m	
	k, k_0	conductivité thermique	$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
	M	point du domaine $\mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$	
	N	limite de séparation entre les modes lents et rapides	
	\mathcal{N}_n	norme de la fonction propre d’ordre n	
	\vec{n}	normale à la frontière	
	R	rayon extérieur du cylindre	m
	r	rayon (coordonnées cylindriques)	m
	r^*	rayon adimensionnel	
	T	champ de température	K
	t	temps	s
	V_n	fonction propre de branche d’ordre n	

* Correspondance et tirés à part.
 alain.neveu@wanadoo.fr



V_n^*	fonction propre adimensionnée	
$x_i, X_i(t)$	coefficient de décomposition ou état d'excitation	
<i>Symboles grecs</i>		
α_i	racines de l'équation transcendante	
κ_{ij}	coefficients du modèle d'état non linéaire	
η_{ij}	coefficients du modèle d'état non linéaire	
δ_{ij}	symbole de Kronecker	
Δ	opérateur laplacien	
Δt	pas de temps de la simulation non linéaire.....	s
γ_{ij}	coefficient du modèle d'état non linéaire	
λ_i	valeur propre de branche d'ordre i	s^{-1}
∇	opérateur nabla	
τ_1	temps caractéristique de diffusion de la chaleur $\tau_d = R^2/a$	s
τ_n	temps caractéristique associé au mode propre d'ordre n	s
ζ	coefficient de modération de la condition limite.....	$J \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$
ξ_i	coefficient du modèle d'état non linéaire	
<i>Indices et exposant</i>		
i, j, n	ordres des modes propres de branche	
m	ordres des fonctions de Bessel	
<i>Symboles divers</i>		
\equiv	égal par définition	

1. MOTIVATION DE LA DÉMARCHÉ DU CALCUL DES MODES DE BRANCHE

Pour résoudre l'équation de la chaleur en régime variable dans des géométries finies, il existe de nombreuses méthodes analytiques ou numériques. Parmi elles, on peut isoler celles conduisant à une solution formelle. Elles ont pour avantage, par rapport aux méthodes purement numériques, de bien se prêter à une analyse du modèle hors simulation (étude de sensibilité et réduction de modèle notamment). Les outils de calcul symbolique sur ordinateur ouvrent de nouvelles possibilités pour mener à bien des calculs souvent laborieux, voire même inaccessibles à la main. Toutefois les solutions analytiques explicites sont confinées à des cas très simples. Il peut être judicieux d'associer les approches du calcul formel et du calcul numérique pour produire des méthodes de résolution efficaces.

La méthode de décomposition sur une base de fonctions du domaine géométrique est l'une de ces méthodes. Le choix de la base est un paramètre

déterminant pour la qualité du modèle. La «base des modes de transfert» est construite avec les fonctions propres de l'opérateur de la chaleur, associé à des conditions limites linéaires et homogènes [1-4]. Elle a été mise en évidence à l'origine par Fourier lui-même, pour résoudre l'équation de la conduction dans des géométries simples [5], et donna naissance aux fameuses séries trigonométriques. La solution s'exprime comme une superposition de fonctions propres. Toutefois, tous les champs thermiques ne sont pas décomposables sur la base des modes de transfert. Ceci est lié à des incompatibilités aux limites entre les fonctions de base, homogènes aux frontières, et le champ recherché. Par exemple, si les conditions aux frontières sont de Dirichlet, les fonctions propres s'annulent sur ces frontières. Il en sera de même pour toutes combinaisons de ces fonctions. Ainsi, il ne sera pas possible de reconstituer par ce moyen un champ de température non nul sur la frontière. La série reconstituant le champ ne converge pas uniformément sur le bord et il faudra s'attendre à une discontinuité du champ sur celui-ci.

La solution pour contourner ce problème consiste à exprimer le régime variable comme la superposition des régimes «glissant» et «dynamique» [6]. Le régime glissant est le régime que prendrait le système s'il était dépourvu d'inertie thermique. Il assure seul la compatibilité aux limites. Sa détermination est apparentée au calcul d'un régime permanent. On peut projeter le champ glissant sur les modes propres de l'opérateur de Poincaré-Steklov $-k\nabla S \cdot \vec{n} = \lambda S$, défini sur la frontière du système [7]. Les fonctions propres S_i forment la «base des modes de couplage» [9, 10]. Le régime dynamique est égal à la différence entre les régimes variable et glissant. Comme ces deux derniers vérifient les mêmes conditions limites, le régime dynamique est homogène sur les frontières. Il est donc strictement décomposable sur la base de transfert. On le voit, la démarche proposée repose fondamentalement sur la possibilité de superposer les solutions. Ce n'est efficace que si l'opérateur du transfert de chaleur est linéaire et stationnaire. De même, les conditions limites du modèle demeurent figées. Comment prendre en compte alors un coefficient d'échange variable avec la température ?

Dans le cas non linéaire, la plupart des méthodes analytiques existantes sont adaptées à un problème particulier. La transformation de Kirchhoff permet de se ramener à un problème linéaire par rapport à une nouvelle variable intégrale, assimilable à un potentiel [11]. Les transformations-similarité introduisent des variables adimensionnelles [12]. Elles sont efficaces pour un milieu unidimensionnel semi-infini. Toutes ces méthodes imposent des restrictions sévères sur les conditions limites.

L'originalité de la méthode proposée ici est le caractère systématique de la démarche d'obtention de la solution du problème non linéaire. Nous définissons une nouvelle base modale qui assure rigoureusement la compatibilité aux frontières, quel que soit le type de conditions limites. Plus précisément, la base modale est

construite avec les valeurs propres d'un opérateur non borné dans L^2 , auto-adjoint d'inverse compact, dont le domaine de définition n'impose pas de conditions limites particulières. En conséquence, ces conditions peuvent être non linéaires. De même il est possible d'utiliser cette base pour traiter des problèmes de conductivité variable avec la température. Le modèle construit à partir de cette base peut ainsi être utilisé dans des configurations variées, sans que l'on ait à déterminer de nouveau la base. Ceci est appréciable lorsqu'on construit des modèles à partir d'une bibliothèque pour simuler des systèmes où de nombreux composants sont thermiquement couplés.

Les méthodes de réduction utilisent souvent comme point de départ un modèle de connaissances complet. C'est ce dernier qui va être réduit. Si la procédure fait appel à une simulation, on parle d'identification paramétrique. Dans d'autres cas, on procède à une troncature du modèle, basée sur un critère de sélection. Il est dans tous les cas nécessaire de connaître a priori les variations des conditions limites et les données thermophysiques en fonction de la température pour construire le modèle de connaissance. Il faut aussi parfois connaître les variations spatiales des coefficients, en convection notamment. Le modèle que nous proposons n'est pas assujéti à cette contrainte. Cette souplesse est liée à l'introduction de la condition limite de Steklov, qui ne fait pas référence au type d'échange en surface. Il faut simplement préciser des valeurs fixes plausibles de la conductivité et de la capacité thermique (celles utilisées lors d'une linéarisation par exemple). Il ouvre donc d'intéressantes perspectives en réduction de modèles non linéaires par troncature de la base.

Nous montrons en premier lieu l'existence de la base des «modes de branche» associée à l'opérateur de la chaleur linéaire et stationnaire. Nous donnerons un exemple de sa détermination analytique dans le cas d'une géométrie simple unidimensionnelle axisymétrique. Les solutions d'un problème non linéaire sont alors obtenues en projetant l'équation d'évolution thermique sur l'espace engendré par les modes de branche. L'équation d'état qui en résulte montre un couplage des modes de branche. Ce couplage est dû à deux causes superposées. D'une part, l'opérateur de la chaleur du problème physique est non linéaire. Dans ce cas, le couplage des modes ne doit pas surprendre, puisqu'il constitue la «signature» de la non-linéarité des systèmes dynamiques [13]. D'autre part, et même si l'opérateur est linéaire, il diffère de celui associé aux modes de branche par ses conditions limites. Lors de la projection de l'équation d'évolution du système sur la base de branche, ces différences engendrent des termes croisés entre les modes que les relations d'orthogonalité ne suffisent plus à annuler.

La base modale sera ensuite utilisée pour calculer l'évolution de la température d'un barreau cylindrique en acier lors de l'opération de trempe thermique. Ce problème présente des non-linéarités internes et des lois

d'échange complexes aux frontières. La possibilité de réduire le modèle modal de branche sera validée.

2. EXISTENCE DE LA BASE DE BRANCHE

2.1. Définition du problème de branche

Comme très souvent pour les techniques modales, la méthode des modes de branche a été proposée initialement en mécanique [14, 15]. Elle permet en particulier de déterminer les modes de vibration d'un système composé d'un corps massif sur lequel sont raccordés des éléments élastiques. La structure rappelle celle formée par le tronc et les branches d'un arbre [16]. Nous définirons le *problème de branche* d'une manière générale, puis nous dégagerons les particularités liées au domaine de la thermique.

Considérons un domaine géométrique tridimensionnel \mathcal{D} , délimité par sa frontière $\partial\mathcal{D}$. Ce domaine est soumis à une évolution thermique gouvernée par l'opérateur de la chaleur en conduction :

$$\forall M \in \mathcal{D} \quad \bar{\nabla} \cdot [k(M, T) \cdot \bar{\nabla} T(M, t)] = c(M, T) \frac{\partial T(M, t)}{\partial t}$$

À cet opérateur auto-adjoint [17], nous associons le problème aux valeurs propres suivant, appelé *problème de branche* :

$$\begin{cases} \forall M \in \mathcal{D} & \bar{\nabla} \cdot [k(M) \cdot \bar{\nabla} V(M)] = \lambda c(M) V(M) & \text{(a)} \\ \forall M \in \partial\mathcal{D} & -k(M) \bar{\nabla} V(M) \cdot \vec{n}(M) = \lambda \zeta V(M) & \text{(b)} \end{cases} \quad (1)$$

L'égalité (1b), vérifiée sur le bord de \mathcal{D} , sera appelée condition limite de Steklov. On ne la confondra pas avec une condition convective de type Fourier, car ici λ est une inconnue liée à la fonction V . On peut démontrer l'existence d'une infinité dénombrable de solutions, appelées modes propres de branche [18]. On repère par l'indice i l'ordre du mode propre V_i associé à la valeur propre λ_i . Dans l'expression de la condition limite, ζ est un coefficient qui assure l'homogénéité dimensionnelle. Il est arbitraire, mais son choix numérique peut être guidé par l'analyse en ordre de grandeur des équations, comme nous l'indiquerons plus loin.

2.2. Orthogonalité des modes

Désignons par \mathcal{F} l'espace des fonctions f définies dans $\mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$, continues, de classe C^1 et de carré sommable. La famille des modes propres de branche forme une base de \mathcal{F} . Les fonctions propres vérifient la relation d'orthogonalité :

$$\langle V_i, V_j \rangle \equiv \int_{\mathcal{D}} c(M) V_i(M) V_j(M) dM + \int_{\partial\mathcal{D}} \zeta V_i(M) V_j(M) dM = \delta_{ij} \quad (2)$$

Nous pouvons écrire la formule de décomposition modale, en notant x_i les coefficients de projection sur la base propre :

$$f(M) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i V_i(M) \quad \text{avec} \quad x_i = \langle f, V_i \rangle \quad (3)$$

Aucune restriction n'est imposée sur la condition limite vérifiée par f . C'est une différence essentielle avec les bases modales classiques, pour lesquelles il est impératif d'imposer des conditions limites linéaires et homogènes d'un type fixé (Dirichlet, Neuman ou Fourier). C'est la relation de décomposition (3) tronquée que nous utiliserons pour obtenir la solution du problème d'évolution thermique non linéaire, l'essentiel du travail étant alors de déterminer l'équation vérifiée par les coefficients de projection x_i . Enfin, notons que les valeurs propres sont réelles si l'opérateur est auto-adjoint, ce qui est le cas ici. De plus on montre que $\lambda_i \leq 0$, ce qui est cohérent avec le second principe de la thermodynamique.

3. DÉTERMINATION ANALYTIQUE DE LA BASE DE BRANCHE

3.1. Équation de branche et forme générale des modes

Nous présentons la démarche analytique de calcul des modes de branche pour une géométrie simple, le lecteur pouvant facilement refaire les calculs. D'une manière générale, ce type de démarche n'est applicable que si le domaine géométrique est un produit tensoriel d'intervalles, autrement dit des segments (1D), des cercles et des rectangles (2D), des cylindres, des sphères et des parallélépipèdes rectangles (3D), éventuellement multicouches. Les modes propres s'expriment comme des combinaisons de fonctions trigonométriques et de fonctions de Bessel. La détermination des constantes aboutit systématiquement à la construction d'une équation transcendante. La recherche de ses racines est presque toujours numérique. Si la géométrie à traiter est plus complexe, on détermine une approximation de la base de branche en discrétisant le problème de branche (1) par une méthode de différences ou d'éléments finis. On est alors ramené à un problème classique de diagonalisation de matrice. Le polynôme caractéristique du problème discret joue en quelque sorte le même rôle que l'équation transcendante du problème analytique. Soulignons que la démarche de projection de la solution du problème non linéaire sur la base de branche, décrite au § 4, est indépendante de la manière dont a été obtenue la base.

Nous envisageons donc un cylindre plein de section circulaire de rayon R , constitué d'un matériau homogène

de diffusivité a . Le problème aux valeurs propres de branche, une fois adimensionné, est défini par les équations :

$$\begin{cases} \forall r^* \in]0,1[\quad \frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left(r^* \frac{d}{dr^*} V^*(r^*) \right) = -\alpha^2 V^*(r^*) & \text{(a)} \\ r^* = 0 \quad \left. \frac{d}{dr^*} V^*(r^*) \right|_{r^*=0} = 0 & \text{(b)} \\ r^* = 1 \quad \left. \frac{d}{dr^*} V^*(r^*) \right|_{r^*=1} = \alpha^2 \frac{\zeta}{cR} V^*(1) & \text{(c)} \end{cases} \quad (4)$$

dans lesquelles nous avons effectué le changement de variables suivant :

$$r^* = \frac{r}{R} \quad V^*(r^*) = V(r) \quad \lambda = -\frac{\alpha^2}{\tau_d} \quad \tau_d = \frac{R^2}{a} \quad (5)$$

α est une grandeur réelle sans dimension et τ_d est le temps caractéristique de diffusion de la chaleur dans le milieu. Toutefois, le système d'équations (4) ne sera adimensionnel que si la contrainte dimensionnelle $[\zeta] = [cR] = [M][T]^{-2}[\Theta]^{-1}$ est respectée. Appliquons le principe de moindre dégénérescence [19] à la condition limite de Steklov (4c). Cela conduit à maintenir, par un choix approprié de ζ , un équilibre entre le flux et la valeur du mode en $r^* = 1$, qui conservera au problème toute sa richesse. Par exemple le choix $\zeta/cR \ll 1$ reviendrait à dégénérer la condition de Steklov en une condition de Neuman. Dans le domaine de la thermique, la valeur numérique du produit cR est grande (typiquement 10^4). Ainsi, par exemple, le choix élémentaire $\zeta = 1$ n'est pas judicieux et conduit à des solutions médiocres du point de vue de la réduction. Les tests numériques effectués montrent que les choix d'une valeur comprise entre $0,5cR$ et 10^3cR aboutissent à des modèles efficaces et pratiquement équivalents. Nous retiendrons par commodité $\zeta = cR$.

L'équation (4a) est une équation de Bessel [20]. Les fonctions propres de branche sont des combinaisons des fonctions de Bessel de première et deuxième espèce d'ordre zéro J_0 et Y_0 :

$$V(r) = J_0 \left[\alpha \frac{r}{R} \right] + A Y_0 \left[\alpha \frac{r}{R} \right] \quad (6)$$

Pour déterminer les constantes A et α , nous utiliserons les conditions limites, ainsi que la relation d'orthogonalité.

3.2. Équations transcendentes aux valeurs propres

La constante A doit être nulle pour respecter la condition sur l'axe (4b), où Y_0 tend vers l'infini. L'écriture de la condition de Steklov sur la frontière aboutit à l'équation transcendente :

$$J_1[\alpha] + \alpha J_0[\alpha] = 0 \quad (7)$$

Elle possède une infinité dénombrable de solutions positives α_n . Les modes associés aux α_n sont simples. On ne confondra pas l'équation transcendante (7) avec celles associées aux modes de transfert et obtenues dans le cas des conditions de Dirichlet, Neuman ou Fourier sur $\partial\mathcal{D}$. Elles s'écriraient respectivement [21] :

Dirichlet

$$V^*(1) = 0 \quad J_0(\alpha) = 0$$

Neuman

$$\left. \frac{d}{dr^*} V^*(r^*) \right|_{r^*=1} = 0 \quad J_1(\alpha) = 0 \quad (8)$$

Fourier

$$\left. \frac{d}{dr^*} V^*(r^*) \right|_{r^*=1} = -B_i V^*(1) \quad \alpha J_1(\alpha) - B_i J_0(\alpha) = 0$$

Bien entendu les modes sont définis à une constante multiplicative près. On peut la choisir par exemple en utilisant la norme construite sur le produit scalaire. Nous poserons en définitive et sous forme dimensionnée (voir annexe) :

$$V_n(r) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}_n}} J_0 \left[\alpha_n \frac{r}{R} \right] \quad (9)$$

$$\text{avec :} \quad \mathcal{N}_n = \pi R^2 c (3 + \alpha_n^2) J_0[\alpha_n]^2$$

3.3. Analyse des temps caractéristiques de branche

Pour fixer les idées, nous appliquons les résultats précédents au cas d'un cylindre d'acier dont les caractéristiques prennent les valeurs numériques suivantes :

$$R = 2 \text{ cm}, \quad k_0 = 35 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}, \quad c_0 = 7 \cdot 10^6 \text{ J}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{K}^{-1},$$

$$\zeta = 1,4 \cdot 10^5 \text{ J}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}, \quad \tau_d = 80 \text{ s}$$

Les racines de (7) sont indépendantes du choix de ces valeurs numériques. Un programme, réalisé avec MathematicaTM, permet de construire et de résoudre l'équation transcendante (7) par une méthode du gradient standard. La *figure 1* représente les courbes α et $-J_1[\alpha]/J_0[\alpha]$ de l'équation transcendante. Les petits cercles repèrent les racines trouvées à l'intersection de ces deux courbes. L'allure pseudo-périodique des fonctions de Bessel simplifie la localisation des racines. La méthode est très précise. On a balayé l'espace $n \in [0,400]$, ce qui est amplement suffisant pour l'analyse qui suivra, le modèle pouvant être fortement réduit, comme nous le montrerons plus loin.

On ordonne les valeurs propres par ordre décroissant des temps caractéristiques $\tau_n = \tau_d/\alpha_n^2$. Les résultats sont reportés dans le *tableau*. On remarque immédiatement la décroissance très rapide des temps caractéristiques. Pour les besoins de l'analyse, nous distinguerons

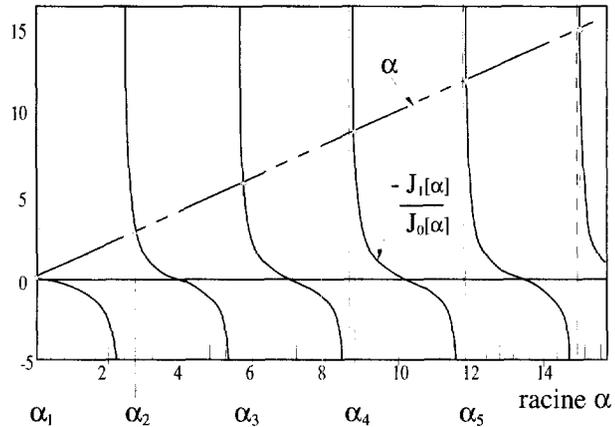


Figure 1. Recherche des racines de l'équation transcendante.
Figure 1. Determination of the roots of the transcendental equation.

deux classes de modes : les modes rapides et les modes lents. Les modes rapides vérifient $\tau_n \ll \tau_d$. Nous choisissons un seuil de séparation pour que le premier des modes rapides, d'ordre $N + 1$, vérifie $\alpha_{N+1} = 60$, soit $\tau_{N+1} = \tau_d/3600$. Le *tableau* montre que cette condition est respectée numériquement au-delà de $N = 20$. Nous justifierons cette frontière au § 3.4.4.

3.4. Interprétation des fonctions propres de branche

3.4.1. Champ de température associé à un mode de branche

Les fonctions propres $V_n(r)$ peuvent être considérées comme des champs de température particuliers qui s'établiraient dans le cylindre. D'après (4) :

$$\begin{cases} \forall r^* \in]0,1[& \Delta^*[V_n^*(r^*)] + \varpi_n(r^*) = 0 & \text{(a)} \\ r^* = 1 & \left. \frac{d}{dr^*} V(r^*) \right|_{r^*=1} = \varphi_n & \text{(b)} \end{cases} \quad (10)$$

où on a posé : $\varpi_n(r^*) = \alpha^2 V_n^*(r^*)$, $\varphi_n = \alpha^2 V_n^*(1)$. La condition (4b) reste inchangée.

Sous cette nouvelle forme, l'observation de (10) montre que les fonctions propres sont assimilables à des champs de température en régime permanent. Pour les obtenir il faut appliquer au cylindre deux sollicitations bien particulières : une densité volumique de puissance ϖ et une densité surfacique de flux φ . Ces deux densités sont proportionnelles en chaque point à la valeur du champ en ce point. Une valeur positive du champ correspond à un apport d'énergie. Puisque (10a) correspond à un régime permanent, le bilan de puissance sur le cylindre doit être équilibré. C'est bien le cas, car l'écriture de ce bilan redonne l'équation transcendante (7), vérifiée par les modes propres.

TABLEAU / TABLE Racines de l'équation transcendante et temps caractéristiques des modes de branche. Ordre 1 à 40. Roots of the transcendental equation and characteristic times of the branch modes. Order 1 to 40.					
Ordre n	racine α_n	τ_n en s	ordre n	racine α_n	τ_n en s
1	0	infinie	21	62,0646	0,0207684
2	2,73462	10,698	22	65,2053	0,0188159
3	5,69140	2,470	23	68,3461	0,0171263
4	8,76678	1,041	24	71,487	0,0156544
5	11,8752	0,567	25	74,6279	0,0143644
6	14,9974	0,356	26	77,7689	0,0132275
7	18,1261	0,243	27	80,9099	0,0122204
8	21,2586	0,177	28	84,051	0,0113241
9	24,3934	0,134	29	87,1921	0,0105229
10	27,5298	0,106	30	90,3332	0,00980381
11	30,6672	0,085	31	93,4744	0,00915597
12	33,8054	0,070	32	96,6159	0,00857029
13	36,9441	0,059	33	99,7568	0,00803905
14	40,0834	0,050	34	102,898	0,00755571
15	43,2229	0,043	35	106,039	0,00711779
16	46,3627	0,037	36	109,181	0,00671118
17	49,5028	0,033	37	112,322	0,00634104
18	52,6430	0,029	38	115,463	0,006007007
19	55,7834	0,026	39	118,605	0,00568705
20	58,9240	0,023	40	121,746	0,00539735

3.4.2. Modes lents

Imaginons que le cylindre initialement isotherme soit plongé dans un fluide à température constante. Le champ de température dans le cylindre à différents instants peut être relié à la forme des modes propres. Considérons en premier lieu les modes lents. Le mode d'ordre $n = 1$ est constant. Il correspond au champ de température à l'équilibre thermique. On le qualifiera par la suite de «mode statique». Les figures 2 et 3 montrent l'allure des fonctions propres associées aux modes lents 2 et 3. Le mode d'ordre $n = 2$ est typique des évolutions très lentes. Combiné au mode statique il donnera l'allure du champ de température pour des temps supérieurs à $3\tau_2$. Une combinaison des modes 1, 2 et 3 permet de reconstituer un cœur encore chaud alors que le bord est déjà fortement refroidi. On rencontre cette configuration lorsque le temps de refroidissement atteint τ_3 .

3.4.3. Forme limite des modes rapides

Les modes rapides correspondent à des ordres n «grands». Nous avons déjà fixé le seuil entre modes lents et rapides à $N = 20$, à partir d'un simple critère sur les temps caractéristiques. Donnons une deuxième raison à ce choix. Lorsque α est grand, les fonctions de Bessel $J_m(\alpha)$ d'ordre m peuvent être approchées par des fonctions trigonométriques [22]. On peut tronquer les séries présentes dans cette approximation. En ne gardant que le terme principal nous écrirons :

$$J_m(\alpha) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}} \cos \left[\alpha - \left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right] \quad (11)$$

Nous dirons que cette troncature constitue «l'approximation des modes rapides». Nous pouvons alors simplifier l'équation transcendante (7) aux ordres élevés en tenant compte de (11). On montre (voir annexe) que les solutions sont bien approchées par :

$$n > N \quad \alpha_n \cong \left[n - \frac{5}{4} \right] \pi \quad (12)$$

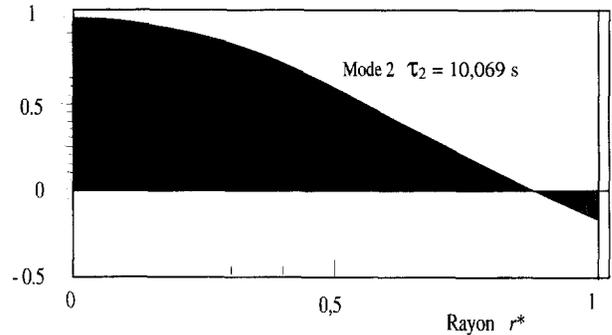


Figure 2. Modes propres de branche d'un cylindre homogène. Ordre 2.

Figure 2. Branch eigenfunction for a homogeneous cylinder. Order 2.

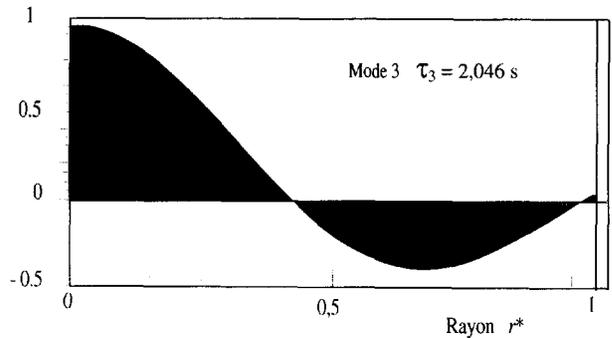


Figure 3. Modes propres de branche d'un cylindre homogène. Ordre 3.

Figure 3. Branch eigenfunction for a homogeneous cylinder. Order 3.

L'erreur relative ε_1 sur la racine α commise en utilisant (12) est représentée sur la *figure 4*. Elle ne dépasse pas 0,03 % pour $N = 20$. Au-delà, les points s'alignent sur une droite de pente 5/2, ce qui montre que cette décroissance est au moins quadratique.

Ces résultats ont aussi des conséquences importantes sur la forme de la fonction propre associée à un mode rapide. En effet, près de la surface du cylindre, la fonction propre d'un mode rapide s'annule pratiquement sur le bord du cylindre. En revanche $\alpha_n V_n(R)$ ne tend pas vers zéro, car α_n vérifie l'équation transcendante. En conséquence, le flux sur le bord du cylindre ne s'annule pas pour les modes rapides. Il est positif pour les modes impairs et négatif pour les modes pairs.

Si on fait le même raisonnement pour calculer les modes propres d'ordre élevé du problème associé à une condition limite de Dirichlet (8), on trouve exactement

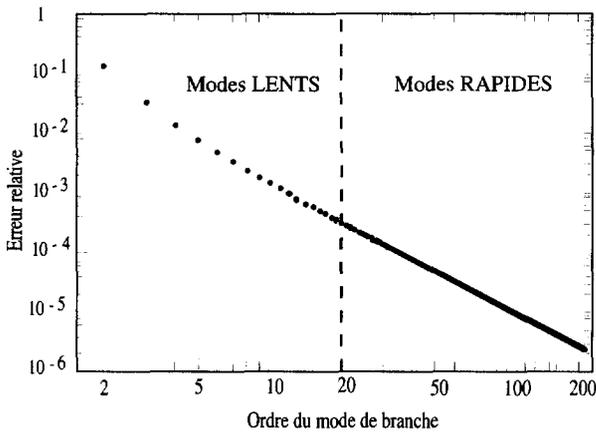


Figure 4. Erreur relative ε_1 sur les racines de l'équation (7), en utilisant l'approximation des modes rapides (12).

Figure 4. Relative error ε_1 on the roots of equation (7) with the use of the fast mode approximation (12).

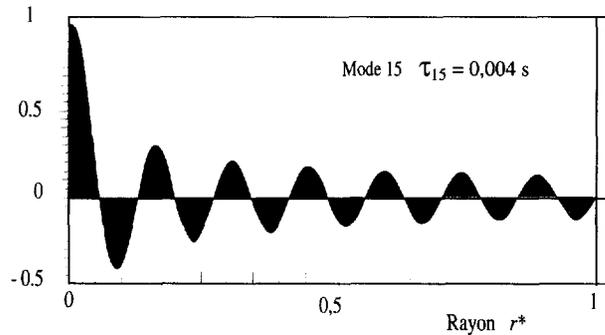


Figure 5. Mode propre de branche rapide pour un cylindre homogène. Ordre 15.

Figure 5. Fast branch mode for a homogeneous cylinder. Order 15.

le même résultat. Ainsi, la condition de Steklov (4c) sur la surface du cylindre peut être assimilée à une condition de Dirichlet homogène dans le cadre de l'approximation des modes rapides. La *figure 5* représente le mode d'ordre 15.

3.4.4. Découplage des modes rapides

Nous allons montrer que les évolutions des modes rapides ont tendance à se découpler. Autrement dit, l'état X_i dans la décomposition (13) est indépendant des autres états. Considérons le champ de température T dans le cylindre. Il vérifie l'équation (16) et il est décomposable sur la base des modes de branche :

$$T(r,t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(t) V_i(r) \quad (13)$$

La formulation variationnelle faible du problème d'évolution thermique du cylindre permet d'écrire l'équation d'état du mode de branche d'ordre n (voir § 4.2). Pour rendre l'étude analytique possible, nous supposons ici que le problème est linéaire. Les coefficients k , c et h sont donc constants. Nous écrirons alors, en utilisant les résultats (19), (20) et l'annexe :

$$\forall n \in \{1,2,\dots\} \quad \lambda_n X_n(t) - \gamma_{nn} \frac{dX_n(t)}{dt} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \eta_{ni} X_i(t) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{\infty} \gamma_{ni} \frac{dX_i(t)}{dt} - \xi_n T_0 \right) \quad (14)$$

Ces équations sont couplées. Toutefois, pour les modes rapides, les coefficients η_{ni} et γ_{ni} des termes croisés convergent vers 0. D'après l'annexe, cette convergence est linéaire pour les couplages avec des modes lents ($i \leq N$) et quadratique pour les couplages avec des modes rapides ($i > N$). De même, le terme lié à la sollicitation extérieure ξ_n tend aussi linéairement vers 0. Enfin γ_{nn} tend vers 1.

Ceci entraîne le découplage numérique des évolutions de ces modes, le membre de droite de l'égalité (14) devenant négligeable. Les états associés sont rapidement amortis et suivent la loi temporelle :

$$n > N \quad X_n(t) = X_n(0) \exp\left(-\alpha_n^2 \frac{t}{\tau_d}\right) \quad (15)$$

Pour des durées d'évolution supérieures à τ_N il est donc envisageable de ne retenir que les N premières équations (14). Les sommations seront tronquées aux N premiers termes, car, au-delà, les termes de couplage avec les modes rapides apportent une contribution négligeable. Ces derniers sont, en effet, le produit des coefficients η et γ , qui convergent linéairement vers une valeur nulle, avec des états dont la décroissance temporelle est exponentielle, d'après (15). Nous obtenons



alors l'équation d'état réduite des modes lents. C'est un système d'équations différentielles couplées du premier ordre et de dimension N .

La figure 6 est une vue symbolique partielle de la matrice symétrique des coefficients $|\gamma_{ni}|$. Chaque petit cercle représente un élément de cette matrice. Le rayon du cercle est lié à la valeur du coefficient $|\gamma_{ni}|$. Pour plus de lisibilité, on a retenu pour ces cercles une échelle logarithmique. Le découplage est remarquable, les termes diagonaux dominant totalement pour des ordres supérieurs à 20. Notons que le plus grand terme extra-diagonal d'une ligne de la matrice est systématiquement celui de la première colonne γ_{n1} (voir annexe). Par exemple, $\gamma_{20,1} = 0,02$ et $\gamma_{40,1} = 0,01$. Ce terme est celui qui caractérise le couplage avec le mode statique.

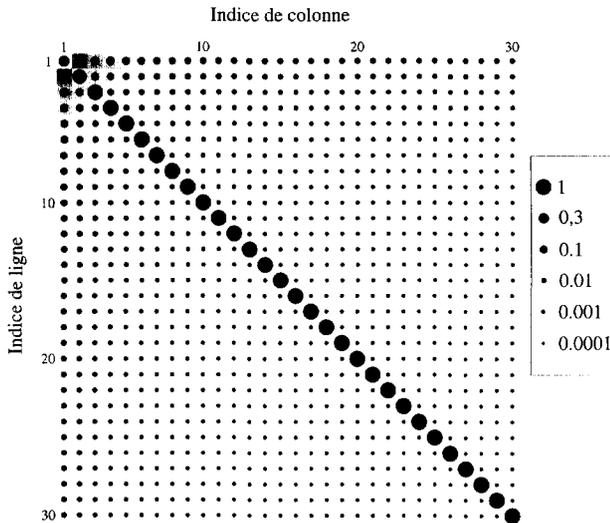


Figure 6. Représentation schématique de la matrice des coefficients $|\gamma_{ni}|$. n indice de ligne, i indice de colonne. Échelle pour les cercles : $r_{ni} = (1 - \log_{10}|\gamma_{ni}|)^{-1}$.

Figure 6. Schematic representation of the matrix $|\gamma_{ni}|$. n for rows, i for columns. Scale for circle: $r_{ni} = (1 - \log_{10}|\gamma_{ni}|)^{-1}$.

Le choix du seuil de séparation $N = 20$ entre les modes rapides et lents est donc raisonnable. C'est cette possibilité de scinder la base de branche en deux sous-espaces découplés qui suggère l'idée de la réduire au sous-espace des modes lents. Nous verrons que ce choix est confirmé par l'exemple numérique du § 4, même lorsque le problème n'est pas linéaire.

3.5. Résumé des propriétés de la base de branche

Les résultats précédents sont valables pour un cylindre homogène infiniment long. Ils sont indépendants

des valeurs numériques de k , c et R , sauf pour les valeurs des temps caractéristiques, tous proportionnels au temps caractéristique de diffusion de la chaleur par conduction.

La base de branche se révèle très riche. Elle rassemble, en quelque sorte, toutes les conditions limites homogènes sur la surface du cylindre :

- Neuman (flux nul) pour le mode statique ;
- Fourier (flux lié linéairement à la valeur du mode sur la frontière) pour les modes lents ;
- Dirichlet (température nulle) pour les modes rapides.

L'approximation des modes rapides fait apparaître une possibilité de réduction par troncature du fait du découplage numérique entre les évolutions des modes rapides et lents. Cette propriété a été mise en évidence pour une équation d'évolution linéaire. Toutefois, nous vérifierons au § 4, grâce à une étude de convergence numérique des éléments de la matrice $|\gamma_{ni}|$, que l'introduction de la non-linéarité ne change pas cette tendance profonde, liée à la dynamique temporelle des modes de branche.

Nous allons donner à présent un exemple d'application de la décomposition sur la base de branche d'un champ de température en régime variable. Cette illustration de la méthode s'appuie sur un cas physique concret. Il s'agit en effet d'un processus de transformation des métaux souvent rencontré dans l'industrie : le traitement thermique par trempe. Outre son intérêt pratique, cet exemple présente de nombreuses difficultés de modélisation. En particulier, il comporte des non-linéarités en volume et en surface, cas où l'utilisation de la base de branche devrait se révéler efficace.

4. SIMULATION DE LA TREMPÉ THERMIQUE

4.1. Description physique de la trempe. Aspects non linéaires

La trempe thermique des métaux est une opération de transformation des propriétés métallurgiques. Elle consiste à chauffer le métal à haute température (900 °C), puis à le refroidir énergiquement en le plongeant dans un fluide (huile à 150 °C). Elle est utilisée par exemple pour augmenter la limite élastique des pièces mécaniques comme les arbres (trempe à cœur). On peut aussi durcir les surfaces de contact comme les dents d'un engrenage (trempe superficielle). Le processus de trempe est complexe, car il fait intervenir des changements de structure dans le réseau cristallin, qui dépendent non seulement de la température de trempe, mais aussi de la vitesse de refroidissement, particulièrement dans les premiers instants [23].

La modélisation proposée de ce processus ne vise ici qu'à illustrer la méthode de décomposition sur la base

de branche. Aussi avons nous simplifié un peu le modèle physique, en supposant par exemple une transformation martensitique dans tout le cylindre. Nous supposons le chauffage préalable uniforme. Ceci ne retire rien au caractère général de la démarche que nous proposons.

Nous étudions le refroidissement d'un cylindre plein en acier de rayon $R = 20$ mm, que l'on trempe dans un bain d'huile à 140 °C à partir d'une température initiale de 840 °C. Ce problème présente de nombreuses non-linéarités. Tout d'abord, il y a la présence de deux phases ayant des conductivités thermiques sensiblement différentes et qui varient avec la température. Ensuite, le changement de phase solide-solide provoque des dégagements de chaleur latente, que l'on modélise par une capacité thermique volumique apparente, qui varie fortement dans la marge de température où a lieu le changement de phase. La capacité calorifique volumique apparente $c(T)$ et la conductivité thermique $k(T)$ de l'acier AISI-1042 sont données sur les figures 7a et 7b respectivement [24].

On posera par la suite $c(T) = c_0 + c_1(T)$ et $k(T) = k_0 + k_1(T)$, la constante c_0 servant dans le produit scalaire.

Enfin, les échanges superficiels dépendent étroitement de la température et du flux échangé en surface. En particulier, si la trempe a lieu dans un liquide, il se forme autour du cylindre, dans les premiers instants après immersion, un film de vapeur qui bloque les échanges (caléfaction ou phénomène de Leidenfrost). Par la suite, on assiste à une ébullition nucléée qui entraîne des échanges très intenses. Lorsque, enfin, la surface du cylindre devient « froide », l'ébullition devient négligeable et les échanges ont lieu essentiellement par convection en phase liquide [25]. L'allure typique de la variation du coefficient d'échange $h(T)$ avec la température T pour une trempe dans de l'huile à 140 °C est donnée sur la figure 7c.

4.2. Transformation intégrale par modes de branche. Équation d'état

En considérant que le cylindre est suffisamment long et que le transfert de chaleur dans le sens radial est le seul significatif, l'équation de la chaleur et les conditions limites s'écriront :

$$\begin{cases} r \in]0, R[& \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k(T) r \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right) = c(T) \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} & \text{(a)} \\ r = 0 & \left. \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 & \text{(b)} \\ r = R & -k(T) \left. \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right|_{r=R} = h(T) (T(R,t) - T_0) & \text{(c)} \end{cases} \quad (16)$$

où T_0 est la température de référence dans l'huile ; k , c et h dépendent de la température, comme le montre

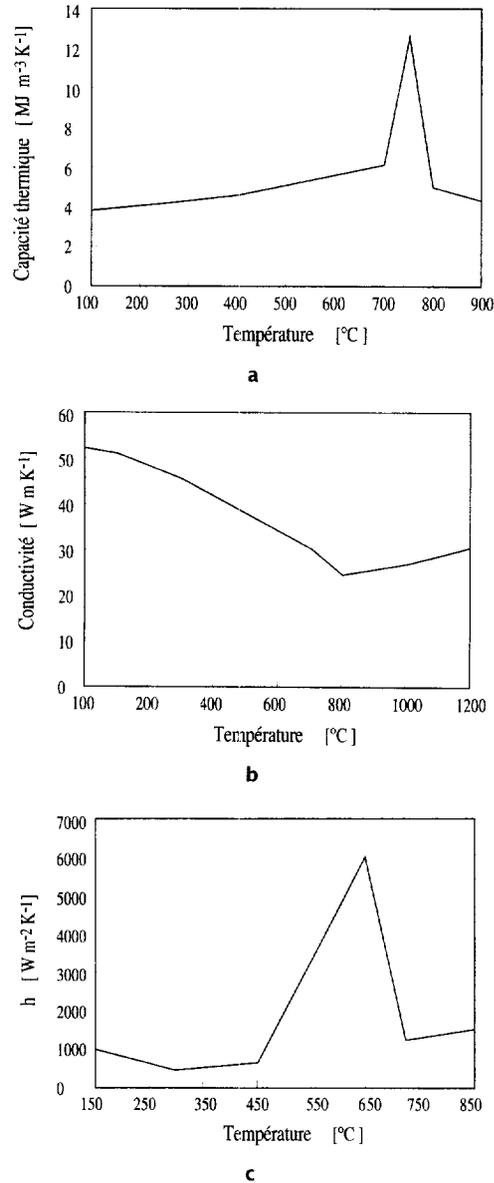


Figure 7. a. Capacité thermique volumique. b. conductivité. c. coefficient d'échange superficiel.

Figure 7. a. Apparent heat capacity. b. Conductivity. c. Surface heat exchange coefficient.

la figure 7. Opérons alors la transformation intégrale qui consiste à multiplier l'équation (16a) par la fonction propre de branche $V_i(r)$ et à intégrer le résultat entre 0 et R :

$$\int_0^R V_i(r) \frac{\partial}{\partial r} \left(k(T) r \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right) 2\pi dr = \int_0^R c(T) V_i(r) \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} 2\pi r dr \quad (17)$$

En intégrant par parties le membre de gauche et en se servant des conditions limites (16b) et (16c), nous obtenons :

$$2\pi R h(T) V_i(R) (T_0 - T(R,t)) - \int_0^R k(T) \frac{dV_i(r)}{dr} \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} 2\pi r dr = \int_0^R c(T) V_i(r) \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} 2\pi r dr \quad (18)$$

Or, nous cherchons une solution de la forme (13). En remplaçant alors dans (18) la température par sa décomposition (13), nous obtenons l'équation d'état non linéaire du mode i :

$$-\sum_{j=1}^{\infty} (\kappa_{ij} + \eta_{ij}) X_j(t) + \xi_i T_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{ij} \frac{dX_j(t)}{dt} \quad (19)$$

avec :

$$\begin{cases} \kappa_{ij} = \int_0^R k(T) \frac{dV_i(r)}{dr} \frac{dV_j(r)}{dr} 2\pi r dr & (a) \\ \eta_{ij} = 2\pi R h(T) V_i(R) V_j(R) & (b) \\ \gamma_{ij} = \int_0^R c(T) V_i(r) V_j(r) 2\pi r dr & (c) \\ \xi_i = 2\pi R h(T) V_i(R) & (d) \end{cases} \quad (20)$$

Par ailleurs, pour connaître la valeur initiale d'un état X_i , on se sert de la formule de projection (3) pour décomposer le champ de température initial sur la base propre de branche :

$$X_i(0) = \int_0^R V_i(r) T(r,0) 2\pi r c_0 dr + 2\pi R^2 c_0 V_i(R) T(R,0) \quad (21)$$

Les équations (19) et (21) peuvent être écrites pour chaque mode V_i dans la base de branche. On aura ainsi un système d'équations différentielles ordinaires non linéaires avec conditions initiales, dont la résolution permettra de déterminer l'évolution des états modaux $X_i(t)$ et, par conséquent, celle du champ de température, selon (13).

4.3. Démarche de résolution numérique

Afin de simuler le problème de trempé décrit au § 4.1. à l'aide d'un modèle modal de branche, une démarche numérique est adoptée. Tout d'abord, on détermine les éléments propres du cylindre. Ici, nous avons utilisé par commodité une approximation sur 200 éléments finis linéaires, répartis de manière progressive entre l'axe et la surface du cylindre. Ce calcul donne pratiquement

les mêmes résultats que le calcul analytique du § 3 pour les 150 premiers modes. Nous verrons que la réduction se contente des 20 premiers modes. Pour les obtenir avec une grande précision, une quarantaine d'éléments auraient été largement suffisants. De plus, on constate que les écarts entre des modèles comportant plus de 50 modes sont indiscernables. L'utilisation de 200 éléments constitue donc ici simplement une référence identique au calcul analytique.

Ensuite, les dérivées temporelles sont approchées par des différences finis du premier ordre. Ainsi, le système d'équations permettant d'obtenir les états $X_i(t)$ à l'instant $t = t_0 + \Delta t$ à partir de leurs valeurs $X_i(t_0)$ à l'instant t_0 s'écrit :

$$\sum_{j=1}^N \left(-\kappa_{ij} - \eta_{ij} - \frac{\gamma_{ij}}{\Delta t} \right) X_j(t) = -\xi_i T_0 - \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_{ij}}{\Delta t} X_j(t_0) \quad (22)$$

On adopte un schéma implicite pur, c'est-à-dire que les coefficients κ_{ij} , η_{ij} , γ_{ij} et ξ_i sont évalués en fonction du champ de température à l'instant t . La résolution du système (22) se fait alors par une méthode d'itérations successives, selon les étapes suivantes :

- connaissant le champ de température à l'instant t_0 , on calcule les coefficients κ_{ij} , η_{ij} , γ_{ij} et ξ_i selon (20) pour $T(t_0)$; le calcul des intégrales utilise une quadrature de Gauss sur 200 éléments linéaires, répartis entre l'axe et la surface du cylindre ; notons que cette technique d'évaluation des intégrales est parfaitement compatible avec l'utilisation d'une approximation des modes de branche par éléments finis ;

- le système (22) est résolu en $X_i(t)$ par une méthode directe (factorisation LU) ;

- on reconstitue le champ de température $T(t)$ sur le maillage utilisé pour l'intégration numérique à partir des valeurs de $X_i(t)$, selon la formule (13) (la somme comprenant dans ce cas un nombre fini de termes) ;

- l'écart de température entre la nouvelle estimation de $T(t)$ et l'ancienne est calculé en valeur absolue en chaque point du maillage ; on considère alors qu'il y a convergence si l'écart maximal est inférieur à une valeur donnée (0,01 °C dans les cas traités ici) ;

- s'il n'y a pas convergence, on calcule de nouveau les coefficients κ_{ij} , η_{ij} , γ_{ij} et ξ_i , selon (20), pour la nouvelle estimation $T(t)$ du champ de température, et l'on recommence une nouvelle itération à partir de l'étape 2 ci-dessus. Les itérations sont répétées jusqu'à convergence.

Ainsi, en partant de l'instant initial où le champ de température est connu, on peut simuler l'évolution de ce dernier au cours du temps en appliquant la démarche décrite ci-dessus pour passer d'un instant donné à l'instant suivant. Cette démarche n'est évidemment pas optimale, mais elle fournit un moyen robuste de résolution et suffit pour illustrer la méthode de décomposition sur la base de branche.

4.4. Simulation avec une base complète

Le processus de trempe est simulé sur une durée de 180 s, avec un pas de temps de 0,5 s. Un premier calcul est effectué à l'aide d'une base modale comprenant 100 modes et considérée comme «complète». Ceci se justifie par le fait qu'à partir de ce nombre (et même avant), les solutions obtenues deviennent pratiquement insensibles à l'augmentation de la dimension de la base. Par ailleurs, les résultats du modèle d'ordre 100 sont comparés à ceux obtenus par une simulation purement numérique, utilisant le modèle à 200 éléments finis. Certes, ce choix n'est pas optimal, mais il garantit une référence fiable, étant donné que, pour les températures observées ici, les résultats ne changent quasiment plus à partir d'une cinquantaine d'éléments. Les différences entre les résultats des deux modèles (modal de branche et éléments finis) sont totalement négligeables (de l'ordre de grandeur du critère d'arrêt du processus itératif, soit 0,01 °C).

La figure 8 montre l'évolution de la température en trois points du cylindre : l'axe, le milieu du rayon et la surface. On distingue par exemple sur la courbe d'évolution de la température de surface les trois phases du refroidissement. Ainsi, avant 5 s environ, on a un début de refroidissement «lent», dû à la caléfaction. Entre 5 et 10 s environ, on distingue la phase d'ébullition nucléée caractérisée par des échanges très intenses et se traduisant ici par un refroidissement très rapide. La troisième et dernière phase correspond à la convection en phase liquide, avec une pente beaucoup moins raide. Le même type d'évolution est répercuté par diffusion à l'intérieur du cylindre (mi-rayon et axe) mais avec un certain retard.

Par ailleurs, et toujours sur la courbe d'évolution de la température de surface, on observe aux alentours de 30 s une sorte de «palier», qui correspond en fait au dégagement de chaleur latente dû à la transformation de phase à l'intérieur du cylindre.

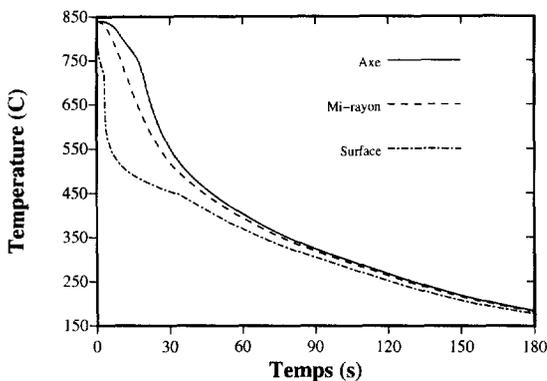


Figure 8. Évolution de la température dans le cylindre lors d'une trempe.

Figure 8. a. Evolution of the temperature in the cylinder during quenching.

4.5. Réduction du modèle

Le plus grand avantage de l'utilisation des bases modales réside bien évidemment dans la possibilité de réduction de ces bases à un nombre assez limité de modes. Ceci permet d'effectuer des simulations précises et en même temps rapides, ce qui peut être très utile lorsque l'on doit faire un très grand nombre de simulations, comme c'est par exemple le cas dans les identifications paramétriques de coefficients d'échange ou même de propriétés thermophysiques.

Le problème de trempe a ainsi été simulé à l'aide de trois modèles réduits comprenant respectivement 5, 10 et 20 modes. Afin de mieux apprécier l'importance de la réduction, précisons que le temps de simulation sur l'ordinateur utilisé a été de 1222 s pour le modèle d'éléments finis à 201 nœuds et, pour les modèles modaux, de 405 secondes avec 20 modes, 128 secondes avec 10 modes et 57 secondes avec 5 modes.

Les courbes d'évolution de la température étant pratiquement confondues, nous avons tracé ici l'évolution des erreurs absolues dues à la troncature des trois modèles, et ce pour la température sur l'axe (figure 9) et sur la surface du cylindre (figure 10). Une échelle logarithmique a été choisie pour le temps, car l'erreur est concentrée aux premiers instants de la simulation.

On constate, sur l'axe du cylindre, que le modèle à 5 modes implique une erreur non négligeable. Elle atteint notamment la valeur de 23 °C environ à 3,5 s. L'examen des résultats de référence montre que cet instant correspond au début de l'ébullition nucléée et que la température à la surface est passée de 722 °C (à 3 s) à 621 °C (à 3,5 s). Ce refroidissement brusque en surface n'est donc pas bien répercuté jusqu'à l'axe du cylindre, à cause du manque de «modes rapides».

Par contre, le modèle à 10 modes fournit des résultats tout à fait acceptables, avec une erreur maximale (toujours à 3,5 s), de l'ordre de 3 °C seulement. Enfin, le modèle à 20 modes ne présente pratiquement pas d'erreur (maximum de 0,7 °C à 3,5 s).

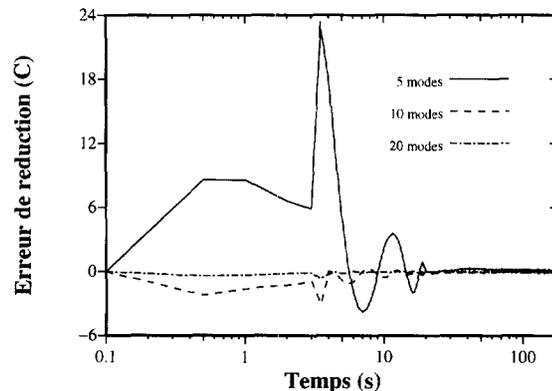


Figure 9. Erreur de réduction sur l'axe du cylindre.

Figure 9. Reduction error on the cylinder axis.

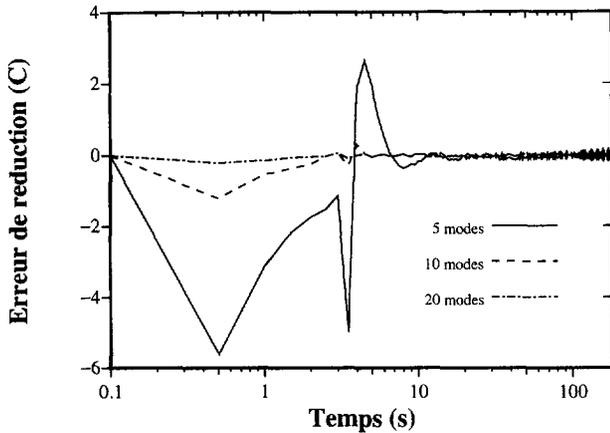


Figure 10. Erreur de réduction sur la surface du cylindre.

Figure 10. Reduction error at the cylinder surface.

Sur la surface du cylindre, le modèle à 5 modes est toujours le moins précis, mais avec une erreur de plus faible amplitude que sur l'axe. En effet, sa valeur maximale est de 5,6 °C, et seulement pour le premier pas de temps. Les deux autres modèles réduits ne présentent pratiquement pas d'erreur significative : un maximum de 1,2 °C pour 10 modes et de 0,2 °C pour 20 modes.

On constate ainsi que la réduction des bases propres de branche peut être assez importante, et ceci malgré les effets non linéaires engendrés par les «pics» du coefficient d'échange h et de la capacité calorifique volumique c .

4.6. Retour sur le découplage des modes

Dans l'exemple que nous venons d'étudier, nous avons réduit les modèles (par troncature). Les résultats sont satisfaisants. Toutefois, nous avons justifié l'idée d'une réduction de la base de branche par une analyse d'un problème linéaire au § 3. Cette analyse avait fait ressortir deux idées :

- les constantes de temps associées au mode décroissent rapidement ; les modes «s'effacent» exponentiellement après trois fois la constante de temps ; l'élimination des modes rapides est donc possible, si on ne s'intéresse pas aux temps très courts ;

- les modes de branche tendent à évoluer de manière découplée, d'autant plus qu'ils sont rapides ; l'élimination d'un mode découplé ne perturbe pas l'évolution des autres modes.

Cette analyse est-elle encore justifiée dans le cas de l'évolution non linéaire envisagée ici ? La décroissance des temps caractéristiques est une propriété intrinsèque des modes de branche. De plus, l'expression (19) est

toujours une équation différentielle du premier ordre en temps. La décroissance exponentielle des états sera donc globalement vraie en non linéaire.

Pour le découplage, il faut faire une analyse numérique de convergence des différents coefficients présents dans l'équation (19), en fonction de l'ordre du mode. La simulation a été effectuée avec 200 modes propres. Bien entendu, les coefficients évoluent au cours du temps, en raison de la non-linéarité. Nous présentons uniquement l'analyse des résultats pour la matrice γ , mais on tire le même type de conclusions à propos de la convergence des coefficients des matrices κ , η et ξ .

La figure 11 est une vue partielle de la matrice des coefficients $|\gamma_{ni}|$ après 3 secondes d'évolution, le type de représentation étant identique à celui de la figure 6. Rappelons que c'est à cet instant que l'erreur est maximale pour les modèles réduits. On remarque que les 8 premiers modes sont fortement couplés. Ceci explique la mauvaise performance du modèle d'ordre 5. Au-delà de l'ordre 20, la diagonale domine. Nous remarquons toutefois la persistance d'une bande autour de la diagonale, qui traduit un couplage entre un mode et ses proches voisins. Ceci peut expliquer la faible erreur constatée avec des modèles réduits à l'ordre 10 et 20. Précisons que cette bande s'estompe au-delà de l'ordre 100, ce qui n'est pas visible sur la figure.

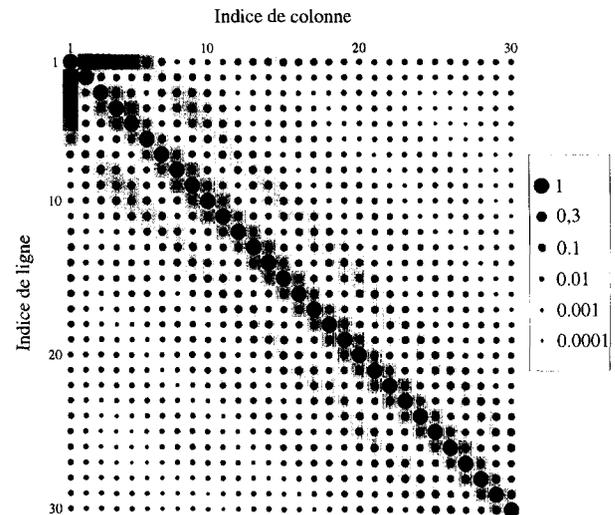


Figure 11. Représentation de la matrice des coefficients $|\gamma_{ni}|$ lors d'une trempe à $t = 3$ s.

Figure 11. Representation of the matrix $|\gamma_{ni}|$ during quenching at $t = 3$ s.

La même matrice est représentée sur la figure 12, après 21 secondes d'évolution. Cette fois, le découplage des modes, déjà bien réel dès l'ordre 5, est net au-delà de l'ordre 10. Pour des temps d'évolution supérieures, les graphes obtenus sont semblables à ceux de la figure 6.

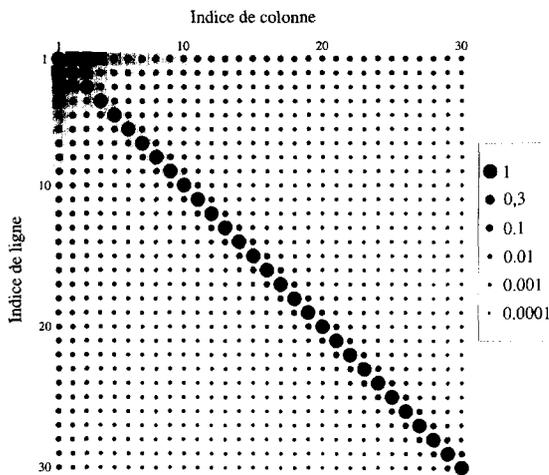


Figure 12. Représentation de la matrice des coefficients $|\gamma_{ni}|$ lors d'une trempe à $t = 21$ s.

Figure 12. Representation of the matrix $|\gamma_{ni}|$ during quenching at $t = 21$ s.

5. PERSPECTIVES

La base de branche se révèle très riche à l'usage pour modéliser des phénomènes de conduction non linéaire. L'exemple choisi est ici volontairement très simple géométriquement. Toutefois, il révèle déjà les potentialités de la méthode : traitement de non-linéarités internes, indépendance de la base vis-à-vis des conditions limites, dominance des modes lents et découplage des modes rapides. Cette dernière propriété suggère la possibilité de réduire le modèle. Le critère de réduction proposé est élémentaire, puisque c'est une simple troncature selon la valeur des temps propres. L'exemple traité a montré qu'il est satisfaisant, même s'il laisse entrevoir la possibilité d'aller au-delà. Des critères encore plus performants pourront donc être recherchés à l'avenir.

Comme pour la méthode modale utilisant les bases de transfert, on peut s'attendre à ce que la démarche soit d'autant plus performante que le modèle est complexe. On peut en effet envisager d'utiliser la base de branche pour traiter des configurations géométriques multidimensionnelles. Dans ce cas, un des atouts de la base de branche sera de pouvoir traiter des conditions limites non linéaires, mais aussi variables spatialement sur la frontière. Ce cas se rencontre fréquemment en convection, autour de corps qui perturbent l'écoulement. C'est aussi le cas lorsque les échanges par rayonnement ne peuvent être négligés. On rencontre ce phénomène, par exemple, lors d'une trempe dans un gaz où le solide à traiter rayonne vers les parois de l'enceinte de confinement. C'est dans cette voie d'application

à des problèmes multidimensionnel non-linéaires, avec des conditions limites spatialement non homogènes, que nous poursuivrons nos travaux sur les bases de branche.

RÉFÉRENCES

- [1] El-Khoury K., Formulation modale de problèmes de diffusion thermique avec transport, Thèse, École des mines de Paris, 1989.
- [2] Hogge M., Collection de la faculté des sciences appliquées de Liège, 41, 1973, pp. 45-69.
- [3] Shih T.M., Skladany J.T., An eigenvalue method for solving transient heat conduction problems, Numer. Heat Tr. 6 (1983) 409-422
- [4] Carter C., Computational methods for passive solar simulation, Sol. Energy 45 (6) (1990) 379-384.
- [5] Fourier J., Théorie analytique de la chaleur, Paris, 1822
- [6] Lefebvre G., Neveu A., El-Khoury K., Salgon J.-J., Applying the modal method to thermal modelling, in : Congrès IHTC, Israël, Jérusalem, 1990.
- [7] Bourquin F., Component mode synthesis of second order elliptic operator, C. R. Acad. Sci. Paris, série I 309 (1989) 919-922
- [8] Durmort C., Flament B., A substructuring approach to 3D conduction problems, Application to building components, in : Proceeding of IBPSA conference, Prague, 1997
- [9] Flament B., Bourquin F., Neveu A., Synthèse modale. Une méthode de sous-structuration dynamique pour la modélisation des systèmes thermiques linéaires, Int. J. Heat Mass Tran. 36 (6) (1993) 1649-1662.
- [10] Flament B., Synthèse modale de systèmes thermiques, Thèse, École des mines de Paris, 1993.
- [11] Ozizik M.N., Heat Conduction, Wiley, 1980.
- [12] Martinet J., Thermocinétique approfondie, Tec & Doc Lavoisier, Paris, 1990.
- [13] Manneville P., Dissipative Structures and Weak Turbulence, Academic Press, 1990.
- [14] Gladwell G.M.L., Branch mode analysis of vibrating systems, J. Sound Vib., 1 (1964) 41-59.
- [15] Imbert J.-F., Analyse des structures par éléments finis, Cepadues éditions, 2^e édition, 1984.
- [16] Jezequel L., Synthèse modale, théorie et extensions, Thèse d'État, Université de Lyon, 1985.
- [17] El-Khoury K., Neveu A., Analyse modale des systèmes thermiques en présence de transferts non réciproques, Int. J. Heat Mass Tran. 32 (2) (1989) 213-226.
- [18] Dautray R., Lions J.-L., Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Collection CEA, Masson, 1985.
- [19] Comolet R., Mécanique expérimentale des fluides. Tome II : Dynamique des fluides réels, turbomachines, 4e éd., Masson, 1994, chapitre 7, p. 165.
- [20] Abramovitz M., Stegun I.A., Handbook of Mathematical Functions, 1st Ed., Dover, New York, 1965, chapitre 9.
- [21] Carslaw H.S., Jaeger J.C., Conduction of Heat in Solids, 2nd Ed., Clarendon Press, Oxford, 1948.
- [22] Martinet J., Éléments de thermocinétique, Annexe 3, Tec & Doc Lavoisier, Paris, 1989.
- [23] Boyer H.E., Gall T.L., Metals Handbook, Desk edition, American Society for Metals, Ohio, 1985, chapter 28.



[24] Boyer H.E., Gall T.L., Metals Handbook, Desk edition, American Society for Metals, Ohio, 1985, 99. 1., pp. 63-64.

[25] Bejan A., Convection Heat Transfer, 2nd Ed., Wiley, New York, 1995.

ANNEXE

Dans cette annexe, c_0 est une constante.

Conséquences de l'orthogonalité

Appliquons la formule générale de l'orthogonalité des modes de branche (2) au cas particulier du cylindre :

$$2\pi R^2 c_0 \left[\int_0^1 V_i^*(r^*) V_j^*(r^*) r^* dr^* + V_i^*(1) V_j^*(1) \right] = \delta_{ij}$$

Multiplions par V_j^* l'équation (4a), vérifiée par V_i^* . Intégrons alors sur le cylindre. On peut faire apparaître les conditions limites (4b, 4c) par une intégration par parties. En utilisant l'orthogonalité on obtient :

$$2\pi R^2 c_0 \left[\int_0^1 \frac{dV_i^*(r^*)}{dr^*} \frac{dV_j^*(r^*)}{dr^*} r^* dr^* \right] = \alpha_i^2 \delta_{ij}$$

À partir de cette relation, nous pouvons déduire une expression de κ_{ij} définie par l'équation (20a). Elle est utile pour construire l'équation d'état linéaire (14) à partir de (19) :

$$\kappa_{ij} = -\lambda_i \delta_{ij} + \int_0^R k_1(T) \frac{dV_i(r)}{dr} \frac{dV_j(r)}{dr} 2\pi r dr$$

Norme

Les modes sont définis à une constante multiplicative près, notée $\sqrt{N_i}$:

$$V_i(r^*) = \frac{1}{\sqrt{N_i}} J_0[\alpha_i r^*]$$

On peut choisir N_i en utilisant la norme construite à partir de la relation d'orthogonalité. Nous poserons en définitive :

$$N_i \equiv 2\pi R^2 c_0 \left[\int_0^1 J_0[\alpha_i r^*]^2 r^* dr^* + J_0[\alpha_i]^2 \right]$$

L'intégration analytique est possible ici. De plus, α_i vérifie l'équation transcendante, soit :

$$N_i = 3\pi R^2 c_0 \left(1 + \frac{\alpha_i^2}{3} \right) J_0[\alpha_i]^2$$

Approximation des modes rapides

On peut construire un développement des fonctions de Bessel à l'aide de fonctions trigonométriques valables pour αx grand :

$$J_m(\alpha x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha x}} \left[\left(1 - \frac{(4m^2 - 1)(4m^2 - 3^2)}{2! (8\alpha x)^2} + \dots \right) \cdot \cos \left[\alpha x - \left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right] - \left(\frac{4m^2 - 1}{1! (8\alpha x)} - \dots \right) \cdot \sin \left[\alpha x - \left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right] \right]$$

On peut alors écrire l'équation transcendante sous forme approchée à l'ordre 2 :

$$\alpha_n = -\frac{J_1(\alpha_n)}{J_0(\alpha_n)} \cong -\frac{7}{8} \operatorname{tg} \left(\alpha_n - \frac{\pi}{4} \right)$$

En étudiant les courbes α et $\operatorname{tg}[\alpha - \pi/4]$, on constate qu'il existe une valeur de N telle que, si $n > N$, alors la solution de cette équation transcendante est très bien approchée par :

$$\alpha_n \cong \left(n - \frac{5}{4} \right) \pi$$

La précision dépasse $5 \cdot 10^{-4}$ pour $n > 20$. L'étude de la courbe d'erreur confirme bien le caractère quadratique de cette approximation (figure 5). Nous retiendrons $N = 20$ comme frontière d'approximation des modes rapides. Utilisons à nouveau le développement jusqu'au deuxième ordre des fonctions de Bessel, ainsi que l'expression approchée de la racine. On trouve, après un calcul sans difficultés :

- temps caractéristique :

$$\tau_n \cong \frac{\tau_d}{\left(n - \frac{5}{4} \right)^2 \pi^2}$$

- norme de la fonction propre :

$$N_n \cong \frac{R^2 c_0}{32\pi} \frac{1}{\left(n - \frac{5}{4} \right)}$$

La fonction propre sur le bord $r = R$ peut être exprimée simplement dans le cas général :

$$V_n(R) = \frac{J_0(\alpha_n)}{\sqrt{N_n}} = \frac{J_0(\alpha_n)}{\sqrt{c_0 \pi R^2 (3 + \alpha_n^2) J_0[\alpha_n]^2}} = \frac{J_0(\alpha_n)}{|J_0(\alpha_n)|} \frac{1}{\sqrt{c_0 \pi R^2 (3 + \alpha_n^2)}}$$

On en déduit immédiatement l'approximation pour les modes rapides $n > N$:

$$V_n(R) \cong \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{c_0 \pi^3 R^2}} \frac{1}{\left(n - \frac{5}{4} \right)}$$

Introduisons le terme surfacique β_{ni} défini par :

$$\beta_{ni} \equiv 2\pi R^2 c_0 V_n(R) V_i(R)$$

Pour $n > N$, nous pouvons alors l'approcher par :

- terme croisé lent-rapide

$$i \leq N \quad |\beta_{ni}| \cong \frac{2}{\pi \sqrt{3 + \alpha^2}} \frac{1}{\left(n - \frac{5}{4}\right)}$$

- terme diagonal

$$i = n \quad \beta_{nn} \cong \frac{2}{\pi^2 \left(n - \frac{5}{4}\right)^2}$$

- terme croisé rapide-rapide

$$i > N \quad \beta_{ni} \cong \frac{2}{\pi^2} \frac{(-1)^{n+i}}{\left(n - \frac{5}{4}\right) \left(i - \frac{5}{4}\right)}$$

Notons en particulier la majoration évidente

$$\forall i \quad \alpha_i \geq 0 \Rightarrow |\beta_{ni}| \leq \frac{2}{\pi \sqrt{3} \left(n - \frac{5}{4}\right)}$$

La formule de l'orthogonalité des modes de branche permet d'obtenir directement le terme intégral γ de (14) comme une expression linéaire de β :

$$\gamma_{ni} = \int_0^R c_0 V_n(r) V_i(r) 2\pi r dr = \delta_{ni} - \beta_{ni}$$

De même $\eta_{ni} = \frac{h}{c_0 R} \beta_{ni}$

Les mêmes approximations sont donc applicables à ces deux termes. Ces différentes formules permettent de déduire la convergence des coefficients de l'équation d'état associés aux modes rapides. Dans le cas linéaire, les valeurs limites sont nulles, sauf pour les termes diagonaux γ_{nn} qui convergent vers 1.

$$\eta_{ni} \approx \begin{cases} O\left(\frac{1}{N}\right) & \text{si } i \leq N \\ O\left(\frac{1}{N^2}\right) & \text{si } i > N \end{cases}$$

$$\gamma_{ni} \approx \begin{cases} O\left(\frac{1}{N}\right) & \text{si } i \leq N \\ 1 - O\left(\frac{1}{N^2}\right) & \text{si } i = n \\ O\left(\frac{1}{N^2}\right) & \text{si } i > N \end{cases}$$

Abridged English Version

Simulation of nonlinear non-steady-state conduction: expansion on the branch modes

1. Introduction

Among the various methods that can be used to solve non-steady heat transfer problems, the modal methods have the advantage of giving a solution that can be expressed formally. These methods consist in expanding the temperature field on a spatial basis of eigenfunctions. They have been widely used since they were first introduced by Fourier in 1822. However, to be expandable on the modal basis, a temperature field must satisfy the same homogeneous boundary conditions that were used in the definition of the eigenvalue problem. This problem has been so far overcome by considering that the temperature field is the sum of two contributions: one 'dynamic' term that satisfies the homogeneous boundary conditions, and is thus expandable in terms of the eigenfunctions, and second its complement called the 'sliding' contribution. Yet, only the solutions of a linear problem having the same kind of boundary conditions can be solved using this approach.

In this article, a new modal method using 'branch modes' is proposed, that allows us to solve various nonlinear problems (such as temperature-dependent thermo-

physical properties) with any kind of nonlinear boundary conditions. The theoretical bases are presented, and the method is tested in the case of the quenching of a steel cylinder. It is also shown that the modal model can be reduced while keeping a good accuracy.

2. Existence of the branch basis

The 'branch eigenvalue problem' is defined by equation (1). $V(M)$ is the eigenfunction associated to the eigenvalue λ . The originality of this problem is that it uses a 'Steklov' boundary condition (1b), in which ζ is an arbitrary coefficient used to homogenize the dimension of the right term. One can show that there exists a countable infinite basis where the eigenlements can be numbered as V_i and λ_i .

The eigenfunctions V_i satisfy the orthogonality relation (2) and form a complete basis for the space of functions that are continuous in $\mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$ and have integrable squares. Any such function f can thus be expanded in terms of the eigenfunctions as shown by equation (3), whatever the boundary conditions it satisfies.

3. Analytical determination of the branch basis

The procedure for the calculation of the branch modes is demonstrated in the case of a cylinder of radius R . The branch problem equations are written as (4) with the change of variables defined by (5). The coefficient ζ is taken equal to cR . Equation (4a) is a Bessel equation and the general form of the eigenmodes is given by (6). The constants A and α are determined using the boundary conditions and the orthogonality relation.

The constant A should be equal to 0 to satisfy the boundary condition (4b). Condition (4c) leads to the transcendental equation (7) that should not be confused with that associated to the classical ‘transfer’ eigenvalue problems written in (8). The eigenfunctions are normalized with equation (9).

A set of numerical values is taken for R , k , c , ζ and τ_d . The transcendental equation is solved using MathematicaTM, and *figure 1* shows how the roots are localized at the intersection of two curves. The results in the table show that the characteristic times decrease very quickly. A mode is considered to be ‘fast’ when $\tau_n \ll \tau_d$. In this case, the first fast mode is considered to be mode 21.

Equations (4) re-written as (10) (with (4b) unchanged) show that each eigenfunction is the solution for a particular steady-state thermal problem with an internal power generation and a boundary heat flux that are proportional to the temperature. Considering that the cylinder, initially at a uniform temperature, is immersed in a fluid at a constant temperature, one can see that the first mode ($n = 1$) that is uniform can represent the initial and the final states. The combination of the slow modes 1 and 2 (the latter shown in *figure 2*) can represent very slow evolution after time $\tau > 3\tau_2$. A combination of modes 1, 2 and 3 (*figure 3*) can represent the temperature field when the heart of the cylinder is still hot while its surface is already cooled.

As for the fast modes, using the approximation (11) of the Bessel functions, it is shown that they tend towards the modes of a classical eigenvalue problem with a Dirichlet boundary condition. Constants α can then be calculated with (12). The example of mode number 15 is shown in *figure 5*.

In the case of a linear problem, a system of ordinary differential equations (14) can be written for the modal states X_i that are defined in (13) as the expansion

coefficients of the temperature. It is then shown that, despite the form of equation (14) where all modes are coupled, the coupling terms γ_{ni} and β_{ni} , as well as the external temperature driving coefficient ξ_n tend towards 0 for fast modes that have an evolution with the form of (15). These modes then vanish very quickly in time, which shows that the modal basis can be reduced to some small order. *Figures 4* and *6* show results that sustain the analysis made above about the possible reduction of the modal model by neglecting the fast modes.

4. Simulation of the quenching of a steel cylinder

The new modal method is tested in the case of the quenching of a steel cylinder whose temperature-dependent properties are shown in *figure 7* (*a* and *b*). Starting from an initial temperature of 840 °C, the cylinder is immersed in oil at 140 °C. The exchange coefficient at the cylinder surface is strongly temperature-dependent as shown in *figure 7c*. The equations of the problem are written in (16).

Applying the integral transform (17) leads to the system of ordinary differential equations (19) with the initial conditions (21).

Simulations are carried out for different cases. First, a large modal model is used (100 modes) and the temperature at three different points of the cylinder is presented in *figure 8*. The same results are obtained with a finite element model using 200 nodes. The modal model is reduced to 20, 10 and 5 modes. The absolute errors on the temperature of the axis (*figure 9*) and at the surface of the cylinder (*figure 10*) are observed. They show an overall good accuracy of the reduced models and a very interesting gain in computation time.

5. Conclusion

The new modal method using the branch eigenvalue problem seems very interesting for the modeling of nonlinear thermal problems. It can take into account any kind of boundary condition. The reduction of the modal basis results in significant gain in computation time with a quite acceptable loss of accuracy. The method is going to be developed and used for multi-dimensional nonlinear heat transfer problems.

